$= \operatorname{cis}(x)\; 2i \cdot \sin y.$

Ersetze $\quad x \longleftrightarrow \frac{x+y}{2}, \quad y \longleftrightarrow \frac{y-x}{2}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\operatorname{cis} y - \operatorname{cis} x = 2i \operatorname{cis}\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)} \quad (*)$$

Nun zeige: $\boxed{|\sin t| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}}$

($0 \leq t \leq 1$: Reihendarstellung!

$-1 \leq t \leq 0$: $\sin$ ungerade,

$|t| \geq 1$: $|\sin t| \leq |\operatorname{cis} t| = 1$)

$\underset{(*)}{\Longrightarrow}$ Lipschitz Bedingung

5) ist aufwendiger und ergibt sich aus der nachfolgenden Überlegung.

$\square$

Zur Definition von π:

Lemma: i) $\cos 0 = 1$,

$\cos x > 0$ für $|x| \leq 1$,

$\cos 2 < 0$,

$\sin t > 0$ für $t \in (0, 2]$

ii) cos fällt auf $[0,2]$ streng monoton

Beweis: i) Reihendarstellung von cos, sin.

ii) bilde Re in (*) $\Longrightarrow$

(**) $\cos y - \cos x = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$

Seien $0 \leq x < y \leq 2 \Longrightarrow$

$$\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2} \in (0, 2] \overset{i)}{\Longrightarrow}$$

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right), \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0$$

(**) $\Longrightarrow \cos y > \cos x$ $\square$

Man hat also:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos : [0, 2] \longrightarrow [\cos 2, 1] \text{ bijektiv,} \\ 0 \in (\cos 2, 1), \quad \cos \text{ Lipschitz} \end{array} \right\}$$

$\underset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow}$

es gibt genau eine Zahl $x^* \in (0,2)$ mit $\boxed{\cos x^* = 0}$

M. a. W.: Für den „Winkel" x^* hat die Drehbewegung den Punkt i erreicht!

$\boxed{\text{Def. 8.6}}$: $\boxed{\pi := 2x^*}$!

(denn $x^* \mathrel{\hat{=}} 90° \mathrel{\hat{=}} \pi/2$)

($\Rightarrow$: $\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = i$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$)

<u>Ergebnis der Rechnung</u>:

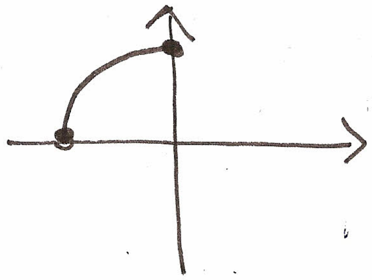
! $\operatorname{cis} : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \{z \in S^1 : \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$

bildet $[0, \frac{\pi}{2}]$ <u>bijektiv</u> auf den <u>oberen</u> <u>Viertelkreis</u> ab.

beachte: $\operatorname{cis}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) =$

$$\operatorname{cis}(x)\,\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i\,\operatorname{cis}(x)$$

$\Longrightarrow$ cis bildet $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ bijektiv ab auf $\{z \in S^1 ; \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$



entsprechend: $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$

außerdem: $\boxed{\operatorname{cis}(x+2\pi)} =$

$$\operatorname{cis} x \cdot \operatorname{cis}(2\pi) = \operatorname{cis} x \underbrace{\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\right)^4}_{=i^4} = \boxed{\operatorname{cis} x}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{cis} : [0, 2\pi) \longrightarrow S^1 \text{ bijektiv}}$$

Zusammenfassung

$\boxed{\text{Satz } 8.9}$: Eigenschaften von sin | cos

1.) $\begin{cases} \sin 0 = \sin \pi = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ \cos 0 = 1, \quad \cos \pi = -1, \quad \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

2.) $\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \cdot \sin y, \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \end{cases}$

3.) $\cos^2 + \sin^2 \equiv 1$

4.) $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|, \quad |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$

5) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

(benutzt $\operatorname{cis}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = i \operatorname{cis} x$!)

$\cos(x+\pi) = -\cos x, \quad \sin(x+\pi) = -\sin x,$

$\cos(x+2\pi) = \cos x, \quad \sin(x+2\pi) = \sin x$

6.) $\sin \mathbb{R} = \cos \mathbb{R} = \sin [0, 2\pi] = \cos [0, 2\pi] = [-1, 1]$

7.) $\cos\big|_{[0,\pi]}$ streng fallend mit Bild $[-1,1]$

$\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ streng wachsend —//—

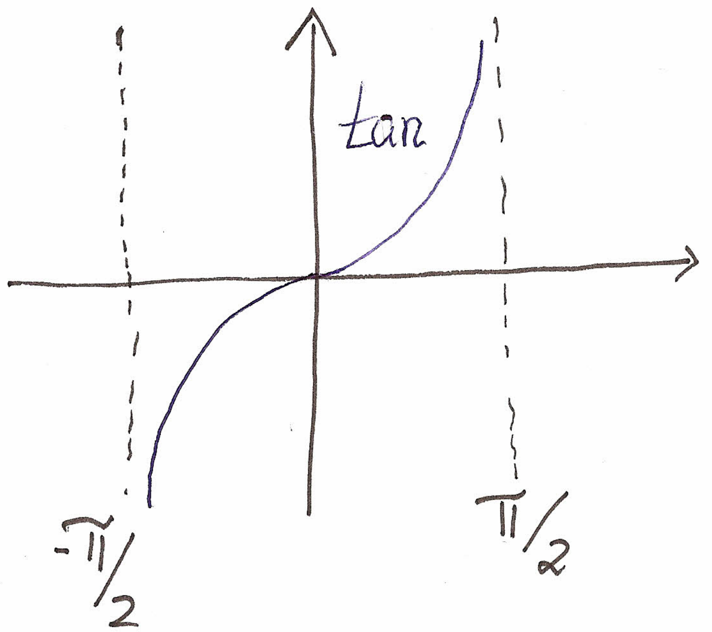
$\boxed{\text{Def. 8.7}}$: (Tangens / Cotangens)

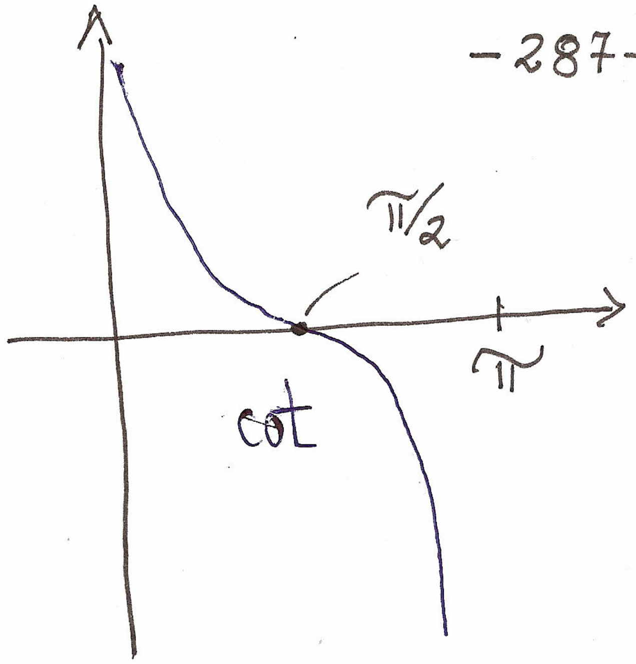
„Tangens" $\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

$x \neq (k + \frac{1}{2})\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

„Cotangens" $\cot x := \dfrac{\cos x}{\sin x}$,

$x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$





„Hauptzweige" auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bzw. $(0, \pi)$

- $\boxed{\text{tan, cot haben Periode } \pi}$
  (d.h. $f(x+\pi) = f(x)$)

denn $\left\{\begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix}\right\}(x+\pi) = -\left\{\begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix}\right\}(x)$

- $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ <u>bijektiv</u>
- $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ <u>bijektiv</u>

sin ist auf $[-\pi/2, \pi/2]$ invertierbar,

cos auf $[0, \pi]$ (vgl. Satz 8.9,(7))

$\rightsquigarrow$ Umkehrfunktionen = Arcus Funktionen

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$$

V. Hyperbelfunktionen

haben gewisse Analogien zu den trigonometrischen Funktionen.

$$\begin{cases} \sinh x := \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \\ \text{(sinus hyperbolicus)} \\ \cosh x := \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right), \quad x \in \mathbb{R} \\ \text{(cosinus } \ldots\ldots\text{)} \end{cases}$$

<u>Dann gilt:</u>

- $-(\sinh x)^2 + (\cosh x)^2 \equiv 1$

mit $u := \sinh x$, $v := \cosh x$ ist

! $\boxed{-u^2 + v^2 \equiv 1}$ <u>Gleichung der Hyperbel</u>

- $\boxed{\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x}$

$$\begin{cases} \tanh x := \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \\[2ex] \coth x := \dfrac{\cosh x}{\sinh x}, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Umkehrfunktionen ?

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \Rightarrow$$

$$2ye^x = (e^x)^2 - 1 \Longrightarrow$$

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

Wegen $e^x > 0$ folgt $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$,

also $\quad x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

$$\operatorname{ar\,sinh} := \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\operatorname{ar\,sinh}(x) := \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

„area sinus hyperbolicus"

die anderen „Area-Funktionen" lauten

$$\operatorname{ar}\cosh : [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty),$$

$$\operatorname{ar}\cosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\left(\text{Umkehrfkt. zu } \cosh|_{[0,\infty)}\right);$$

$$\operatorname{ar}\tanh : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\operatorname{ar}\tanh(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x};$$

$$\operatorname{ar}\coth : \mathbb{R} - [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\},$$

$$\operatorname{ar}\coth(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

$\square$

§ 9 Stetigkeit

$\boxed{\text{Def 9.1}}$: Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f: D \to \mathbb{C}$.

1.) f heißt $\boxed{\text{stetig an einer Stelle } a \in D}$

$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ mit

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit

$|x - a| < \delta$

2.) f heißt stetig auf D $:\Longleftrightarrow$

f stetig an jeder Stelle $a \in D$.

Bem: Ist $\boxed{D \subset \mathbb{Z}}$, so ist jede Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ stetig!

"Beweis": wähle $a \in D$ und setze $\delta := \frac{1}{2}$!

M.a.W.: Bei „diskretem Definitionsbereich" ist Stetigkeit keine Forderung.

Satz 9.1: $f : D \to \mathbb{C}$ Lipschitz $\Longrightarrow$ f stetig auf D

Beweis: „$\delta = \varepsilon/L$" $\quad (|f(x)-f(y)| \le L\,|x-y|)$

Bemerkung: Umkehrung falsch!

$f : [0,1] \ni x \mapsto \sqrt{x}$ nicht Lipschitz auf $[0,1]$, aber stetig an jeder Stelle $a \in [0,1]$

Beweis: 1.) Sei $\boxed{a > 0.}$ Wir wissen:

f Lipschitz auf $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \infty$.

Wähle α, β mit $\alpha < a < \beta$. $\Longrightarrow$ f stetig in a.

2.) Sei $a = 0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben

$$\Longrightarrow \quad |f(t) - f(0)| = \sqrt{t} < \varepsilon,$$

falls $t \in [0, \varepsilon^2)$; sei also $\delta := \varepsilon^2$.

Beispiele:

① 1. $\boxed{\text{Potenzreihen sind stetig auf dem Inneren ihres Konvergenzbereiches.}}$

Beweis: Sei $R :=$ Konvergenzradius $\Longrightarrow$ Lipschitz Stetigkeit auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ für $r < R$, $z_0 :=$ Entwicklungsmitte.

② 2. aus ① folgt:

$\boxed{\exp, \sin, \cos \text{ stetig}}$

(ergibt sich auch aus Lipschitz Stetigkeit !)

(3) $\boxed{\ln \text{ stetig auf } (0,\infty)}$,

da Lipschitz auf $[a,\infty)$, $a>0$, nach Satz 8.5

(4) aus den „Rechenregeln Satz 9.3" folgt:

$\boxed{\text{tan, cot, Hyperbelfunktionen stetig auf ihrem Definitionsbereich}}$

(5) Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 0, & x\in\mathbb{Q} \\ 1, & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$

<u>Zeige</u>: 1.) f ist an <u>keiner</u> Stelle stetig

2.) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t) := t\,f(t)$, ist stetig in 0.

ad 2): $|g(t)-g(0)| = |t\,f(t)| \leq |t|$!

Anmerkung: <u>topologische Def. der Stetigkeit</u>

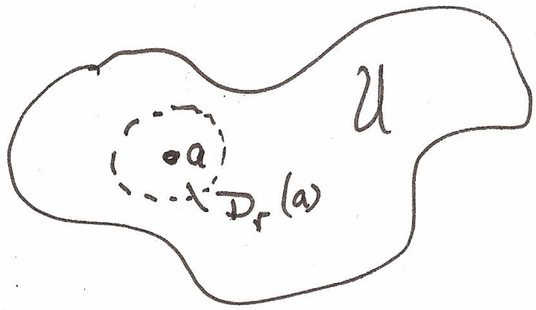
- für $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, sei

$$D_r(a) := \{ z \in \mathbb{C} : |z-a| < r \}$$

(<u>offene</u> Kreisscheibe um a mit Radius r)

- $U \subset \mathbb{C}$ heißt <u>eine Umgebung von</u> $a \in \mathbb{C}$

$$:\Longleftrightarrow \exists\, r > 0 : D_r(a) \subset U$$



Sei nun $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, eine Funktion und $a \in D$. Dann gilt:

$$\boxed{f \text{ stetig in } a \Longleftrightarrow \text{zu jeder Umgebung } V \text{ von } f(a) \text{ existiert eine Umgebung } U \text{ von } a \text{ mit } f(U \cap D) \subset V}$$

Ist alles reell", so betrachte Intervalle $I_r(a) := (a-r, a+r)$ statt Kreisscheiben $D_r(a)$. $\square$

Äußerst nützlich ist

Satz 9.2 : Folgenkriterium für Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

f stetig in a $\iff$ für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$.

f ist also unstetig in a, wenn man eine Folge (x_n) findet mit $x_n \to a$, aber $f(x_n) \not\to f(a)$.

Beweis: „$\Longrightarrow$" Gelte $x_n \longrightarrow a$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben $\underset{\text{Stetigkeit}}{\Longrightarrow} \exists \delta : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in D,\ |x-a| < \delta$

Offenbar: $|x_n - a| < \delta \quad \forall n \geq N_\delta$.

$\Longrightarrow \quad |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon \quad$ –//–

M.a.W.: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$

„$\Longleftarrow$" Annahme: f unstetig in a

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ findet man ein $x_\delta \in D$ mit $|x_\delta - a| < \delta$, aber $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Wähle speziell $\delta := 1/n \Longrightarrow$

$y_n := x_{1/n} \longrightarrow a$, aber $|f(y_n) - f(a)| \geq \varepsilon$,

Wspr ! $\quad \square$

Unmittelbar aus dem Folgenkriterium folgt

$\boxed{\text{Satz 9.3}}$: (Rechenregeln)

Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ stetig in $a \in D$. Dann gilt:

1.) $f \pm g$, $f \cdot g$ stetig in a

2.) $g(a) \neq 0 \implies f/g$ stetig in a

3.) $\text{Bild}(f) \subset \mathcal{D}f(h)$, h stetig in $f(a)$ $\implies h \circ f$ stetig in a.

Zum Beispiel:

a) $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x^2}$ stetig auf $\mathbb{R}$

b) $x \mapsto \ln(1+\sin^2 x)$ — 〃 —

c) $x \mapsto \exp(\tan x)$ stetig, wo „tan" definiert